ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
ΑΝΔΡΕΑΣ ΤΟΛΙΑΣ

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ
ΤΜΗΜΑ ΠΕΡΙΤΤΩΝ Α.Μ
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΙΟΥΝΙΟΥ
ΙΟΥΝΙΟΣ 26 , 2017

1. Να εξετάσετε , δίδοντας πλήρη αιτιολόγηση αν οι παρακάτω ισχυρισμοί είναι αληθείς ή ψευδείς.

(α΄) Αν $a_n \geqslant 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι συγκλίνουσα , τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ είναι συγκλίνουσα.

(β΄) Αν $a_n \geqslant 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ είναι συγκλίνουσα τότε συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(γ΄) Αν η συνάρτηση $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής τότε είναι φραγμένη.

(δ΄) Αν η συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη τότε η συνάρτηση $g : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ε΄) Αν η φραγμένη συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη τότε η f είναι συνεχής.

2. (α΄) Να διατυπωθεί (χωρίς απόδειξη) το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.

(β΄) Δίδεται μία συνεχής συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε δύο νέες συναρτήσεις $g, h : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$g(x) = \int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right)\,dt \quad , \quad h(x) = \int_1^x f\left(\frac{t}{x}\right)\,dt$$

Να υπολογιστούν οι παράγωγοι των g, h.

3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\mathcal{J} = \int_{-\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}/3} \frac{2x^3 - x^2 + 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}\,dx$$

4. Συγκλίνει καθεμία από τις παρακάτω σειρές:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^3}{(\log 3)^n}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$

Αιτιολογήσατε τας απαντήσεις σας.

5. Υπολογίσατε το πολυώνυμο Taylor βαθμού n της $f(x) = \log x$ σε σημείο x_0 δικής σας επιλογής.

6. Υπολογίσατε τα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int \frac{\log \tan x}{\sin^2 x}\,dx$ (ii) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \sin\frac{x}{2}\,dx$